Ejercicio 4 de la relación de problemas. Se considera el espacio vectorial de las funciones reales definidas sobre $\mathbb{R}$ y sea $U = L(e^{3x}, x\,e^{3x}, x^2e^{3x})$. Se pide:

a) Calcular una base de U.

b) Sea $\phi : U \to U$ dada por $\phi(f) = f'(x)$.

b.i) Razonar que ϕ es una aplicación lineal.

b.ii) Calcular la expresión matricial respecto de la base de U.

b.iii) Calcular el núcleo y la imagen de ϕ.¿Es ϕ un isomorfismo de espacios vectoriales?

b.iv) Dado el vector $f(x) = 2\,e^{3x} + 4x\,e^{3x} - x^2e^{3x}$ determinar su imagen utilizando b.ii) y comprobar el resultado utilizando derivación.

a) Partimos de un sistema de generadores dados por las funciones reales $\{e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}\}$, para que este conjunto sea base, es necesario que además sean linealmente independientes, veámoslo usando la definición:

Consideramos una combinación lineal de estos vectores igualada a cero:

$$\alpha e^{3x} + \beta x\,e^{3x} + \gamma x^2e^{3x} = 0 \xrightarrow{\text{Sacando factor común}} (\alpha + \beta x + \gamma x^2)e^{3x} = 0 \xrightarrow{e^{3x} \neq 0} \alpha + \beta x + \gamma x^2 = 0$$

Luego, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, y por tanto el conjunto $\{e^{3x}, x\,e^{3x}, x^2e^{3x}\}$ es una base de U b.i) Este apartado lo podemos razonar usando las propiedades que todos conocemos de la derivada de una función real, a saber:

- La derivada de una suma es la suma de las derivadas, de donde deducimos la primera propiedad de la definición de aplicación lineal: $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$.

- La derivada del producto de un número por una función es igual al número por la derivada de la función, de donde deducimos la segunda propiedad de la definición de aplicación lineal: $\phi(\alpha f) = \alpha\, \phi(f)$.

Por tanto, ϕ es una aplicación lineal.

b.ii) Para calcular la matriz asociada a ϕ respecto de la base $B = \{e^{3x}, x\, e^{3x}, x^2 e^{3x}\}$ tenemos que calcular la imagen de cada uno de estos vectores:

$\phi(e^{3x}) = 3e^{3x}$

$\phi(xe^{3x}) = e^{3x} + 3xe^{3x}$

$\phi(x^2e^{3x}) = 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}$

Calculamos las coordenadas en B

$\phi(e^{3x}) = (3, 0 , 0)_B$

$\phi(xe^{3x}) = (1, 3 , 0)_B$

$\phi(x^2e^{3x}) = (0, 2 , 3)_B$

La matriz que nos piden es la matriz cuyas columnas son las coordenadas anteriores.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b.iii) Sabemos que la base de la imagen vendrá dada por las columnas linealmente independientes de la matriz anterior. Para ver cuantas son linealmente independientes calculamos su rango. Empezamos obteniendo su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

rango(A) = 3, las tres columnas son linealmente independientes y podemos decir que $B_{Im(\phi)} = \{(3, 0, 0), (1, 3, 0), (0, 2, 3)\}$ o bien si escribimos directamente los vectores

$$B_{Im(\phi)} = \{3e^{3x}, e^{3x} + 3xe^{3x}, 2xe^{3x} + 3x^2e^{3x}\}$$

Teniendo en cuenta que U es de dimensión 3 y que Im(ϕ) es un subespacio tres dimensional de U, podemos asegurar que Im(ϕ) = U, es decir, ϕ es sobreyectiva.

Por otra parte, a partir de la formula dim(Ker(ϕ)) + dim(Im(ϕ)) = dim(U), podemos deducir que dim(Ker(ϕ)) = 0, de donde, Ker(ϕ) = {0}, es decir, ϕ es inyectiva.

En resumen, ϕ es un isomorfismo (ya que se biyectiva). En realidad es una automorfimo pues se trata de una endomorfismo biyectivo. Esto también podíamos haberlo deducido directamente de A ya que es cuadrada y regular, lo que implica que ϕ es isomorfismo.

b.iv) La función real $f(x) = 2\, e^{3x} + 4x\, e^{3x} - x^2 e^{3x}$ respecto de la base B tiene como coordenadas el vector (2, 4, -1) y su imagen usando la matriz asociada ϕ respecto de la base B se obtiene multiplicando la matriz obtenida en el apartado b.ii) por estas coordenadas:

$$\phi\,(f) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lo que obtenemos son las coordenadas con respecto a la base B del vector imagen que será:
$\phi\ (f) = 10e^{3x} + 10x\, e^{3x} - 3x^2 e^{3x}$.

Por otra parte, derivando:

$$\phi(2e^{3x} + 4x\, e^{3x} - x^2 e^{3x}) = 6e^{3x} + 4e^{3x} + 12xe^{3x} - 2xe^{3x} - 3x^2 e^{3x} = 10e^{3x} + 10x\, e^{3x} - 3x^2 e^{3x}$$

Como vemos coincide con lo obtenido anteriormente.